РЕФЕРАТ

по дисциплината **Дискретни структури**

1. (*) Докажете асоциативността на операциите обединение и сечение на множества, тоест, че за произволни множества A, B и C са изпълнени следните равенства:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ и } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2. (*) Докажете дистрибутивните закони

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

за произволни множества A, B и C.

3. (*) Докажете правилата на Де Морган: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ за произволни множества A и B.

4. (**) Докажете асоциативността на операцията симетрична разлика на множества: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ за произволни множества A, B и C.

5. Нека $A = \{a, b, c, \{3, 4\}\}$, $B = \{3, 4, c, \{a\}\}$. Определете следните множества:

а) $A \cap B$; **б)** $A \cup B$; **в)** $A \setminus B$; **г)** $2^{A \cap B}$; **д)** $A \oplus \{\emptyset, a, b, c\}$.

Отговори: **а)** $\{c\}$; **б)** $\{a, b, c, 3, 4, \{a\}, \{3, 4\}\}$; **в)** $\{a, b, \{3, 4\}\}$; **г)** $\{\emptyset, \{c\}\}$; **д)** $\{\emptyset, \{3, 4\}\}$;

6. Нека $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$, $B = \{3, \{2\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}\}$ и $C = \{1, \{1, 2\}\}$. Определете следните множества:

а) $A \cap B$; **б)** $(A \cap B) \cup C$; **в)** $(A \oplus B) \cap C$; **г)** $(A \cap B) \times C$;
д) $A \oplus B \oplus C$; **е)** $(B \setminus A) \cup C$; **ж)** $((A \oplus B) \cap C) \oplus C$; **з)** 2^C.

Отговори: **а)** $\{3, \{3, 4\}\}$; **б)** $\{1, 3, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$; **в)** $\{1, \{1, 2\}\}$;
г) $\{(3, 1), (3, \{1, 2\}), (\{3, 4\}, 1), (\{3, 4\}, \{1, 2\})\}$;
д) $\{2, \{2\}, \{1, 4\}\}$; **е)** $\{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$; **ж)** $\emptyset$;
з) $\{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}\}$.

7. Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{x, y, z\}$. Отношенията R (върху множествата A и B) и S (върху B и A) са зададени по следния начин: $R := \{(1, y), (1, z), (2, x), (4, z)\}$ и $S := \{(x, 1), (x, 4), (y, 3), (z, 4)\}$.

Определете елементите на следните отношения: **а)** $S \circ R$; **б)** $R \circ S$; **в)** $S \circ (R \circ S)$; **г)** $(R \circ S)^{-1}$; **д)** $R \circ R^{-1}$; **е)** $R^{-1} \circ R$.

Отговори: **а)** $\{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 4)\}$;
б) $\{(x, y), (x, z), (z, z)\}$; **в)** $\{(x, 3), (x, 4), (z, 4)\}$;
г) $\{(y, x), (z, x), (z, z)\}$;
д) $\{(x, x), (y, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}$;
е) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1), (4, 4)\}$.

8. (***) Нека A е крайно множество, а R е отношение върху него. Докажете, че за транзитивната обвивка $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ на R е в сила

$$R^+ = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n,$$

където n е броят на елементите на множеството A.

Упътване: Нека $x, y \in A$. Покажете, че $(x, y) \in R^m$ тогава и само тогава, когато съществува редица $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ от елементи на A, такава че xRy_1, y_1Ry_2, …, $y_{m-1}Ry$. След това докажете, че за най-късата такава редица е в сила $m \leq n$.

9. Определете транзитивната обвивка на всяка от посочените релации върху множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$:
а) $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$;
б) $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$;
в) $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
г) $R = \{(1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$.

Упътване: Можете да използвате наготово предишната задача 8, т.е., определете транзитивната обвивка чрез $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$ (тъй като $n = |A| = 4$).

Отговори: **а)** $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
б) $\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$; **в)** $\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$;
г) $R^+ = A \times A = A^2$;

10. Определете най-големия общ делител на следните двойки числа:
а) 2323 и 3220; **б)** 392 и 297; **в)** 12221 и 2323; **г)** 12221 и 297; **д)** 3220 и 392; **е)** 3220 и 297; **ж)** 495 и 297.

Кои от посочените двойки числа са взаимно прости?

Отговори: **а)** 23; **б)** 1; **в)** 101; **г)** 11; **д)** 28; **е)** 1; **ж)** 99.
Взаимно прости са двойките числа от подточки б) и е).

11. Определете остатъка от делението на:

а) 171^{184} на 13; **б)** 89^{165} на 17; **в)** 49^{633} на 43; **г*)** 16^{86} на 21 **д*)** 3^{243} на 16; **е)** 49^{678} на 53.

Упътване: Приложете теоремата на Ферма за подточки а), б), в) и е). За подточка г) определете остатъците при деление на 21 на първите няколко степени на 16 (тоест 16^1, 16^2, 16^3, $\ldots$) докато намерите най-ниската от тях, която е сравнима с 1 по модул 21 (вж. също задача 14). След това постъпете като в предишните подточки. Решете подточка д) аналогично като определите степените на 3 по модул 16.

Отговори: **а)** 3; **б)** 4; **в)** 1; **г)** 4; **д)** 11; **е)** 16.

12. Определете резултата от:
а) $\overline{17}+\overline{4}$ в $\mathbb{Z}_{21}$; **б)** $\overline{171}+\overline{184}$ в $\mathbb{Z}_{223}$; **в)** $\overline{5}.\overline{4}$ в $\mathbb{Z}_{10}$; **г)** $\overline{17}.\overline{4}$ в $\mathbb{Z}_{19}$; **д)** $\overline{11}.\overline{41}$ в $\mathbb{Z}_{211}$; **е)** $\overline{25}.\overline{27}$ в $\mathbb{Z}_{337}$.

Отговори: **а)** $\overline{0}$; **б)** $\overline{132}$; **в)** $\overline{0}$; **г)** $\overline{11}$; **д)** $\overline{29}$; **е)** $\overline{1}$.

13. Представете следните числа в посочената бройна система:
а) $23_{(10)}$ в двоична; **б)** $341_{(10)}$ в осмична; **в)** $3413_{(10)}$ в 16–ична; **г)** $221_{(10)}$ в 5–ична; **д)** $1771_{(10)}$ в 7–ична; **е)** $A27B_{(16)}$ в десетична; **ж)** $3012_{(4)}$ в двоична; **з)** $110001110110101001_{(2)}$ в 16–ична; **и)** $11000111_{(2)}$ в десетична; **й)** $2AB7_{(16)}$ в двоична.

Отговори: **а)** $10111_{(2)}$; **б)** $525_{(8)}$; **в)** $D55_{(16)}$; **г)** $1341_{(5)}$; **д)** $5110_{(7)}$; **е)** $41595_{(10)}$; **ж)** $11000110_{(2)}$; **з)** $31DA9_{(16)}$; **и)** $199_{(10)}$; **й)** $10101010110111_{(2)}$.

14. **(**)** Нека p и q са две различни прости числа, а $n = pq$. Докажете, че

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{n}$$

за всяко число a, което е взаимно просто с n.

Упътване: Използвайте теоремата на Ферма за да докажете, че всяко от простите числа p и q дели $a^{(p-1)(q-1)} - 1$.

15. Колко са петцифрените числа, не по-малки от 47000, които имат различни цифри?

Упътване: Първо определете броя на възможностите за първите две цифри, след което определете броя на възможностите за последните три цифри (при условие че първите две цифри вече са избрани).

Отговор: $48.8.7.6 = 16128$.

16. Определете броя на положителните делители на всяко едно от следните числа:

а) 600; **б)** 777; **в)** 2010; **г)** 99000; **д)** 12321.

Упътване: а) Използвайте каноничното разлагане $600 = 2^3.3.5^2$ и съобразете, че за произволен положителен делител d на 600 е в сила $d = 2^a.3^b.5^c$, където $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 1$ и $0 \le c \le 2$ (тъй като степенният показател на всеки прост делител е не по-голям от съответния степенен показател в разлагането на 600). След това определете броя на възможностите от принципа за произведението.

Отговори: а) $4.2.3 = 24$; б) 8; в) 16; г) 96; д) 9.

17. **(*)** Колко измежду числата от 1 до 200 се делят на поне едно от числата 4, 6 или 10?

Упътване: Използвайте принципа за включване и изключване за множествата $A = \{n : 4|n,\ 1 \le n \le 200\}$, $B = \{n : 6|n,\ 1 \le n \le 200\}$ и $C = \{n : 10|n,\ 1 \le n \le 200\}$.

Отговор: 74.

18. **(*)** Какъв е броят на всички възможни релации върху дадено крайно множество A?

Отговор: $2^{|A\times A|} = 2^{n^2}$, където с n е означен броят на елементите на A.

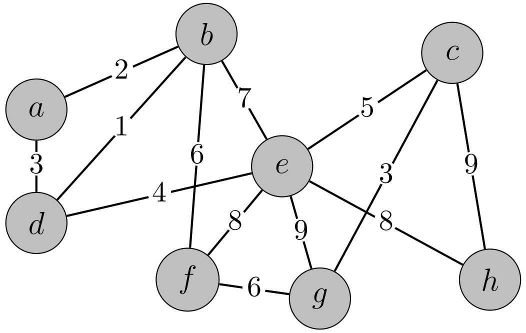
19. В изпитната сесия има 7 възможни изпитни дати, валидни за всяка от 5 дисциплини. Студент е решил да се яви на изпит по всяка от тях. По колко възможни начина студентът може да организира явяването си на тези изпити, ако има право само на едно явяване по всяка от дисциплините?

Отговор: $V_7^5 = 7.6.5.4.3 = 2520$.

20. На изпит по Дискретни структури се явили 46 студенти. От тях 15 не са решили нито една задача, а от останалите студенти, решилите първа задача са 24, втора задача – 22, трета задача – 19, първа и втора задача – 14, първа и трета задача – 12, втора и трета задача – 10. Никой не е решавал задачите след трета. Условието за успешно явяване на изпит е да има поне три решени задачи. Колко студенти са положили успешно този изпит?

Отговор: 2.

21. Измежду 100 предмета, 30 са метални, 25 са кръгли, а 21 са боядисани в синьо. От тях 10 са едновременно метални и кръгли, 9 са метални и сини, 9 са кръгли и сини, а тези, които са и метални,



Фиг. 1: Граф G от задачи 22 и 23.

и кръгли, и сини, са 4. Колко предмети не притежават никоя от посочените характеристики?

Отговор: 48.

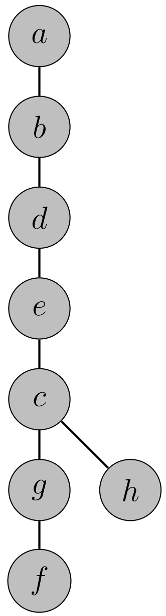
22. Нека G е графът, посочен на фиг. 1. Считайте, че списъците на съседство са подредени в азбучен ред. Определете реда на обхождане на върховете му и съответното дърво при

а) обхождане в дълбочина с начален връх a;
б) обхождане в дълбочина с начален връх b;
в) обхождане в дълбочина с начален връх e;
г) обхождане в широчина с начален връх h;
д) обхождане в широчина с начален връх g;
е) обхождане в широчина с начален връх f.

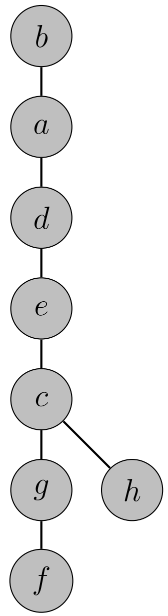
23. Нека G е графът, посочен на фиг. 1. Определете

а) минимално покриващо дърво;
б) минимално покриващо дърво, което съдържа реброто ad;
в) минимално покриващо дърво, което съдържа реброто eg;
г) минимално покриващо дърво, което съдържа ребрата ef и eg;

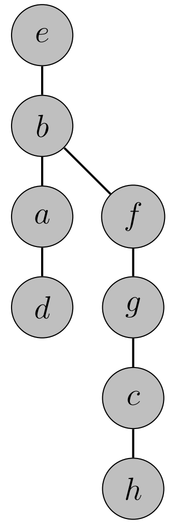
Упътване: За подточки б), в) и г), първо включете към покриващото дърво посочените в условието ребра, а след това продължете с алгоритъма на Крускал за останалите ребра.



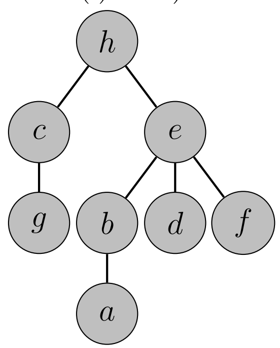
(i) 22 а)



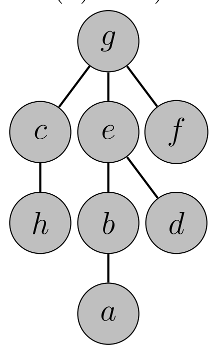
(ii) 22 б)



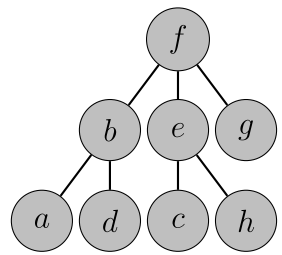
(iii) 22 в)



(iv) 22 г)

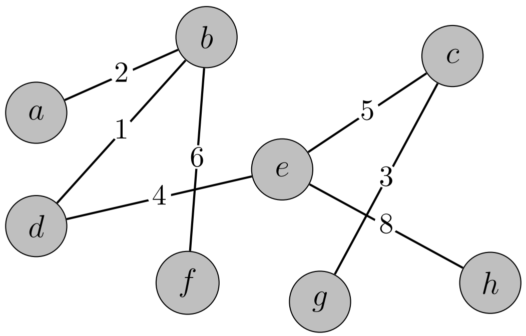


(v) 22 д)

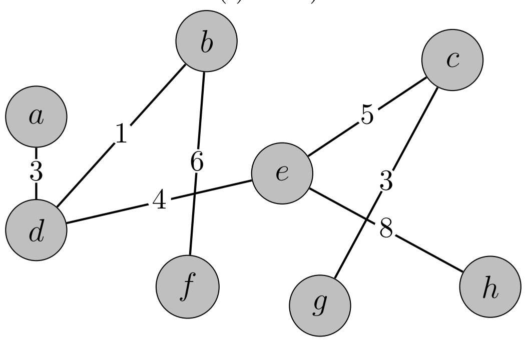


(vi) 22 е)

Фиг. 2: Дървета на обхождане от задача 22.

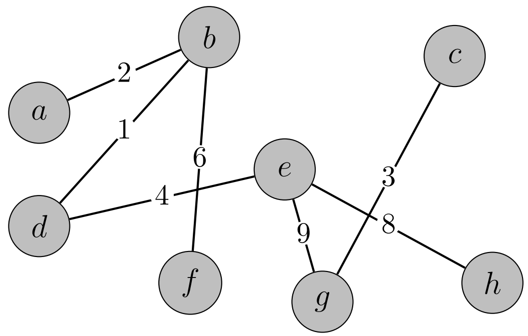


(i) 23 а)

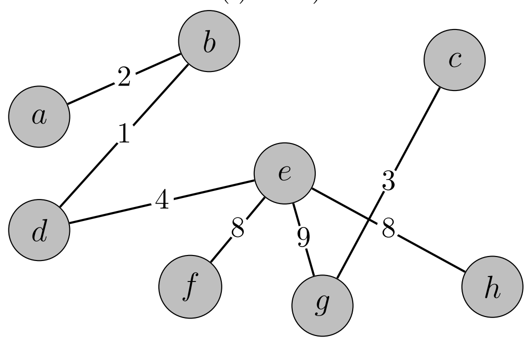


(ii) 23 б)

Фиг. 3: Отговори на задача 23 а) и б).



(i) 23 в)



(ii) 23 г)

Фиг. 4: Отговори на задача 23 в) и г).

24. ($'$) Определете таблиците на истинност, съвършената ДНФ и полиномите на Жегалкин за функциите $f = f(x, y, z)$:
а) $f = \overline{(x \oplus y\bar{z})}\,.\,((x \mid z) \to \bar{y})$; **б)** $f = (x \oplus y\bar{z})\,.\,((x \mid z) \to \bar{y})$;
в) $f = ((x \oplus z) \mid \bar{y}) \to \overline{(x \vee y)}$; **г)** $f = (x \oplus y\bar{z}) \leftrightarrow ((x \oplus z) \mid \bar{y})$;
д) $f = (((x \to z).x) \to z) \to \overline{(xz \vee (x \leftrightarrow y))}$.

Отговори:

24($'$) а) Съвършена ДНФ: $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$;
Полином на Жегалкин: $f = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$;
24($'$) б) Съвършена ДНФ: $f = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$;
Полином на Жегалкин: $f = x \oplus xy \oplus xyz$;

x	y	z	$y\bar{z}$	$x \oplus y\bar{z}$	$x \mid z$	$(x \mid z) \to \bar{y}$	f
0	0	0	0	0	1	1	**0**
0	0	1	0	0	1	1	**0**
0	1	0	1	1	1	0	**0**
0	1	1	0	0	1	0	**0**
1	0	0	0	1	1	1	**1**
1	0	1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	1	0	1	0	**0**
1	1	1	0	1	0	1	**1**

24($'$) в) Съвършена ДНФ: $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$;
Полином на Жегалкин: $f = 1 \oplus y \oplus xz \oplus xyz$;

x	y	z	$x \oplus z$	$(x \oplus z) \mid \bar{y}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	f
0	0	0	0	1	0	1	**1**
0	0	1	1	0	0	1	**1**
0	1	0	0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	1	1	0	**0**
1	0	0	1	0	1	0	**1**
1	0	1	0	1	1	0	**0**
1	1	0	1	1	1	0	**0**
1	1	1	0	1	1	0	**0**

24($'$) г) Съвършена ДНФ: $f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$;
Полином на Жегалкин: $f = y \oplus z \oplus xy$;
24($'$) д) Съвършена ДНФ: $f = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$;
Полином на Жегалкин: $f = x \oplus y \oplus xz \oplus xyz$;